Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

Finanzmathematik
Wintersemester 2018 / 2019

Blatt 11

- Abgabe bis **Donnerstag 24.01.2019 um 12:00.**
- Abgabe ins Postfach 89 auf Ebene D13.

Aufgabe 1. (2 Punkte)
Finden Sie ein Beispiel für einen endilchen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ und $A, B, C \subset \Omega$ mit den Eigenschaften:

(i) A, B, C sind paarweise unabhängig.

(ii) A, B, C sind nicht unabhängig sind.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei $\Omega = \{+1, -1\}^3$ und definiere $\mathbb{P}$ durch

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := p(\omega) := q(\omega_1)q(\omega_2)q(\omega_3), \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega,$$

wo $q(+1), q(-1) \in [0, 1]$ gegeben ist mit $q(+1) + q(-1) = 1$. Zeigen Sie

(a) $(\Omega, \mathbb{P})$ ist ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Für $0 < a_- < a_+$ sind die Zufallsvariablen Y_1, Y_2, Y_3 unabhängig, wo

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} a_+, & \omega_t = +1 \\ a_-, & \omega_t = -1 \end{cases}.$$

(c) Geben Sie ein Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf Ω derart, dass Y_1, Y_2, Y_3 nicht unabhängig sind.

Definition Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben A ist definiert durch

$$\mathbb{P}(B|A) := \mathbb{P}_A(B) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}, \qquad B \subset \Omega.$$

Sei X eine Zufallsvariable. Der bedingte Erwartungswert von X gegeben A ist definiert durch $\mathbb{E}(X|A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}_A}(X)$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(\Omega, \mathbb{P}_A)$ ist eine endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Sei $B \subset \Omega$. Dann sind A, B genau dann unabhängig, wenn $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

(c) Ist X eine Zufallsvariable, so gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_A}(X) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A X)}{\mathbb{P}(A)}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Betrachte das CRR-Modell mit 2 Perioden und $r = \frac{1}{2}$, $a_- = \frac{1}{2}$, $a_+ = 2$ sowie $S_0^0 = 1 = S_0^1$. Seien Mengen $A, B \subset \Omega = \{+1, -1\}^2$ gegeben durch

$$A = \{\omega \mid \omega_2 = +1\}, \quad B = \{\omega \mid \omega_1 = -1\}.$$

Betrachte das risikoneutrale Maß $\mathbb{P}$ auf Ω gegeben durch

$$p(\omega_1, \omega_2) = q(\omega_1)q(\omega_2),$$

wo $q(+1) = \frac{1+r-a_-}{a_+-a_-}$ sowie $q(-1) = \frac{a_+-(1+r)}{a_+-a_-}$. Bestimmen Sie

(a) $\mathbb{P}(A|B)$ und $\mathbb{P}(B|A)$.

(b) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2^1|B)$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_1^1|A)$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2^1|A)$, sowie $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_1^1|B)$.